3 次元回転の最適推定と信頼性評価

太田 直哉 † 金谷 健一 †

† 群馬大学工学部情報工学科

本論文では 2 組の 3 次元データ点集合の間の回転を最適に推定する計算法を述べるとともに、計算した解の信頼性を定量的に評価する手法を示す。空間データは測定装置の特性による誤差分布の異方性が著しいので、等方誤差分布を前提とする最小二乗法は大きな誤差が生じる。本論文では誤差分布の異方性を考慮した最適推定の方式を示すとともに、解を系統的に計算するくりこみ法を回転の四元数表現によって構成する。そして、ステレオ視による 3 次元復元の場合の例を示し、本論文の方法が最小二乗法に比べて著しく精度を向上させることをブートストラップによって検証する。同時にその精度はクラメル・ラオの下界をほぼ達成し、したがって解の精度がクラメル・ラオの下界によって解析的に評価できることを示す。

キーワード: 3 次元回転, 統計的推定, クラメル・ラオの下界, くりこみ法, ステレオ視, ブートストラップ

Optimal Estimation of 3-D Rotation and Reliability Evaluation

Naoya Ohta† and Kenichi Kanatani†

†Department of Computer Science
Gunma University, Kiryu, Gunma 376, Japan

This paper describes an optimal method for estimating a 3-D rotation between two sets of 3-D point data and presents an analytical scheme for evaluating the reliability of the computed solution. Since the error distribution for 3-D data has strongly anisotropy that reflects the characteristics of the involved measurement device, the usual least-squares method results in large errors. We present a statistically optimal scheme that takes into account the anisotropy of the errors in the data and derive a renormalization procedure for systematically computing the solution by using the quaternion representation. Taking stereo vision as an example of 3-D sensing and conducting bootstrap for reliability evaluation, we demonstrate that our scheme dramatically improves the accuracy as compared with the least-squares method. We also show that the solution almost attains the Cramer-Rao lower bound, which implies that we can use the Cramer-Rao lower bound for analytically evaluating the reliability of the solution.

Key words: 3-D rotation, statistical inference, Cramer-Rao lower bound, renormalization, stereo vision, bootstrap

謝辞: 本研究の一部は文部省科学研究費基盤研究 C (2) (No. 09680352) によった。

† 376 桐生市天神町 1–5–1 群馬大学工学部情報工学科, Tel: (0277)30-1842, Fax: (0277)30-1801,
E-mail: {ohta|kanatani}@cs.gunma-u.ac.jp

1 はじめに

ステレオ視やレンジファインダで計測した二つの 3 次元形状が同一であるか、あるいは特定の形状と一致しているかを調べることは物体認識の重要な課題である。その基本的な解法は、一方の形状を他方に移す剛体運動を計算し、両者が一致するかどうかを調べればよい。データが点座標で与えられていると、互いの点データ集合の重心が重なるように平行移動すれば、問題は回転のみの推定となる。

ステレオ視やレンジファインダを用いると、単一視点からは裏側の部分が復元できない。そこで複数視点から距離を計測してそれらを統合することが試みられている [15, 17]。そのためには二つの視点から共通に見える部分を比較して視線の回転角を計算する必要がある。これも点データ集合の回転の推定の問題に帰着する。

データを 2 組のベクトルの集合 $\{\boldsymbol{r}_\alpha\}$, $\{\boldsymbol{r}'_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ とする。回転行列 $\boldsymbol{R}$ を計算するのによく用いられるのは次の最小二乗法である。

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \|\boldsymbol{r}'_\alpha - \boldsymbol{R}\boldsymbol{r}_\alpha\|^2 \to \min \tag{1}$$

ただし、ベクトル $\boldsymbol{a}$=(a_i) のノルムを $\|\boldsymbol{a}\|(=\sqrt{\sum_{i=1}^{3} {a_i}^2})$ と表す。森本ら [15] も清水ら [17] もこのような最小二乗法を用いている。

式 (1) の解を解析的に計算する手法として四元数による方法 [3]、特異値分解による方法 [1]、極分解による方法 [4] が知られている。四元数の方法では解は必ず $\det \boldsymbol{R} = 1$ の回転行列となる。それ以外の方法ではこれが考慮されていなかったが、$\det \boldsymbol{R} = 1$ の制約のもとでの最小二乗解の解析解は Umeyama [18] によって示され、Kanatani [10] によって一般化された (付録 A; 文献 [8] 参照)。いずれの方法でも得られる解は同一である。

式 (1) の最小二乗法は暗黙に次の仮定に基づいている。

- ベクトル $\boldsymbol{r}_\alpha$ には誤差はなく、それが回転した位置 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}_\alpha$ に誤差 $\Delta\boldsymbol{r}'_\alpha$ が加わる。
- 誤差 $\Delta\boldsymbol{r}'_\alpha$ は期待値 $\boldsymbol{0}$ のあらゆる方向に等方な正規分布に従う。
- 誤差の分散はデータ点の位置によらない。

このとき最小二乗法は最尤推定の意味で最適である。しかしこれらの仮定は現実的でない。なぜならばステレオ視やレンジファインダによる 3 次元計測の誤差は極めて非一様、非等方であるからである。

- ステレオ視ではカメラの画像面に平行な成分に比べて奥行き方向の誤差が著しく大きく、またその誤差はその特徴点の位置の奥行きが大きいほど大きい [13]。レンジファインダの誤差特性は装置によるが、一般に誤差の大きさは測定点の位置に依存する [14]。
- ステレオ視でもレンジファインダでも計測方向ごとに誤差が入るので、一方のデータに誤差がなく他方にのみ誤差が入るとすることはできない。

このような状況に最小二乗法を適用すると精度の良い推定ができない。本論文では上述の空間データの誤差特性を考慮した最適な推定法を導き、くりこみ法による効率的な計算法を示す。また得られた解の信頼性をクラメル・ラオの下界により理論的に評価し、実画像例を用いてその信頼性をブートストラップによって検証する。

2 問題の定式化

各点の真の位置を $\{\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha\}$, $\{\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha\}$ とし、観測位置 $\{\boldsymbol{r}_\alpha\}$, $\{\boldsymbol{r}'_\alpha\}$ は次のように誤差が加わったものとする。

$$\boldsymbol{r}_\alpha = \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{r}_\alpha, \quad \boldsymbol{r}'_\alpha = \bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha + \Delta\boldsymbol{r}'_\alpha \tag{2}$$

誤差 $\Delta\boldsymbol{r}_\alpha$, $\Delta\boldsymbol{r}'_\alpha$ は独立で期待値 $\boldsymbol{0}$ の正規分布に従うとし、それぞれの共分散行列 [11] を次のように置く (記号 $E[\,\cdot\,]$ は期待値を表す)。

$$V[\boldsymbol{r}_\alpha] = E[\Delta\boldsymbol{r}_\alpha \Delta\boldsymbol{r}_\alpha{}^\top], \;\; V[\boldsymbol{r}'_\alpha] = E[\Delta\boldsymbol{r}'_\alpha \Delta\boldsymbol{r}'_\alpha{}^\top] \tag{3}$$

これらは一般にデータごとに異なる。このとき、回転を推定する問題は次のように書ける。

【問 題 1】 真の位置 $\{\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha\}$, $\{\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha\}$ に対して

$$\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha = \boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha, \quad \alpha = 1, ..., N \tag{4}$$

となる回転行列 $\boldsymbol{R}$ を誤差のあるデータ $\{\boldsymbol{r}_\alpha\}$, $\{\boldsymbol{r}'_\alpha\}$ から推定せよ。

共分散行列 $V[\boldsymbol{r}_\alpha]$, $V[\boldsymbol{r}'_\alpha]$ の絶対的な大きさを予測することは実際には困難な場合が多い。例えばステレオ視では奥行き方向の誤差はそれと直交する方向に比べてどの程度大きいかとか、誤差の大きさは奥行き距離が増えるとどのように大きくなるかなどの関係はカメラ配置の幾何学的関係から導くことができるが [13]、誤差の絶対的な大きさは画像の解像度や対応点探索の方法などに依存するので、事前に予測することが難しい。レンジファインダでも同様である [14]。そこで以下では $V[\boldsymbol{r}_\alpha]$, $V[\boldsymbol{r}'_\alpha]$ は定数倍を除いて既知であると仮定し、次のように分解する。

$$V[\boldsymbol{r}_\alpha] = \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{r}_\alpha], \quad V[\boldsymbol{r}'_\alpha] = \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha] \tag{5}$$

そして行列 $V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]$, $V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]$ は既知であるが、定数 ϵ は未知であるとする。以下、$V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]$, $V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]$ を正規化共分散行列、ϵ をノイズレベルと呼ぶ。

3 クラメル・ラオの下界

推定した回転行列を $\hat{\boldsymbol{R}}$、真の回転行列を $\bar{\boldsymbol{R}}$ とすると、その食い違いは相対回転行列 $\hat{\boldsymbol{R}}\bar{\boldsymbol{R}}^\top$ で表される。その回転軸を $\boldsymbol{l}_r$ (単位ベクトル), その周りの (右ねじ方向の) 微

小回転角を $\Delta\Omega$ とする。すなわち、回転 $\hat{\boldsymbol{R}}$ は回転 $\bar{\boldsymbol{R}}$ に軸 $\boldsymbol{l}_r$ の周りの角度 $\Delta\Omega$ の微小回転を合成したものとみなす。そして $\Delta\boldsymbol{\Omega} = \Delta\Omega\boldsymbol{l}_r$ と置き、回転 $\hat{\boldsymbol{R}}$ の共分散行列を次のように定義する [11, 12]。

$$V[\hat{\boldsymbol{R}}] = E[\Delta\boldsymbol{\Omega}\Delta\boldsymbol{\Omega}^\top] \tag{6}$$

このとき問題 1の解をどのように計算しても、得られる解 $\hat{\boldsymbol{R}}$ の共分散行列の下界が次のように与えられる [12]。これをクラメル・ラオの下界と呼ぶ [11]。

$$V[\hat{\boldsymbol{R}}] \succ \epsilon^2 \left(\sum_{\alpha=1}^{N} (\bar{\boldsymbol{R}}\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha) \times \bar{\boldsymbol{W}}_\alpha \times (\bar{\boldsymbol{R}}\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha) \right)^{-1} \tag{7}$$

$$\bar{\boldsymbol{W}}_\alpha = \left(\bar{\boldsymbol{R}} V_0[\boldsymbol{r}_\alpha] \bar{\boldsymbol{R}}^\top + V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha] \right)^{-1} \tag{8}$$

ただし、対称行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ に対して $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ が半正値対称行列であるとき $\boldsymbol{A} \succ \boldsymbol{B}$ と書く。また、ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_i)$ と行列 $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ に対して $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{v}$ をその (ij) 要素が $\sum_{k,l,m,n=1}^{3} \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn} v_k v_m A_{ln}$ の行列と約束する。ここに ε_{ijk} はエディングトンのイプシロンであり、(ijk) が (123) の偶順列のとき 1, 奇順列のとき -1, その他は 0 をとる記号である。

誤差の分布が一様・等方なら式 (7) に $V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]$=$V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]$=$\boldsymbol{I}$ (単位行列) を代入すればよい。その結果は Oliensis[16] が導いたものに相当している。

4 回転の最尤推定

問題 1の最尤推定は条件 (4) のもとで次のマハラノビス距離 [11, 12] の二乗和の最小化を行なうものである。

$$\begin{aligned} J = &\sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{r}_\alpha - \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha, V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]^{-1}(\boldsymbol{r}_\alpha - \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha)) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{r}'_\alpha - \bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha, V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]^{-1}(\boldsymbol{r}'_\alpha - \bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha)) \\ &\to \min \end{aligned} \tag{9}$$

ただし、ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_i)$, $\boldsymbol{b} = (b_i)$ の内積を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ $(= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i)$ と表す。これから得られる最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{R}}$ の共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{R}}]$ は第 1 近似において式 (7) のクラメル・ラオの下界を達成する [12]。したがって式 (7) の右辺の $\{\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha\}$, $\{\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha\}$, $\bar{\boldsymbol{R}}$ にそれぞれ $\{\boldsymbol{r}_\alpha\}$, $\{\boldsymbol{r}'_\alpha\}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$ を代入することによって $\hat{\boldsymbol{R}}$ の共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{R}}]$ を評価することができる。

式 (9) の J の最小値を $\hat{J}$ と書き、推定の残差と呼ぶ。$\hat{J}/\epsilon^2$ は第 1 近似において自由度 $3(N-1)$ の χ^2 分布に従う [12]。したがって二乗ノイズレベル ϵ^2 の不偏推定量が次のように得られる。

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{\hat{J}}{3(N-1)} \tag{10}$$

5 直接表現による解法

拘束条件 (4) にラグランジュ未定乗数を導入して式 (9) を書き直すと次のようになる [12]。

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{r}'_\alpha - \boldsymbol{R}\boldsymbol{r}_\alpha, \boldsymbol{W}_\alpha(\boldsymbol{r}'_\alpha - \boldsymbol{R}\boldsymbol{r}_\alpha)) \to \min \tag{11}$$

ただし重み行列 $\boldsymbol{W}_\alpha$ は式 (8) で $\bar{\boldsymbol{R}}$ を $\boldsymbol{R}$ 置き換えた行列である。特に誤差の分布が一様・等方なら $V_0[\boldsymbol{r}_\alpha] = V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha] = \boldsymbol{I}$ であるから、式 (11) は式 (1) になる。したがって $\{\boldsymbol{r}_\alpha\}$, $\{\boldsymbol{r}'_\alpha\}$ の両方に誤差が加わっても、それが一様・等方であれば最小二乗解が最尤推定の意味で最適となる。この事実は Goryn and Hein [5] によって指摘された。

しかし、このような直接表現による最適解を得るのは以下の理由により効率的でない。

- 関数 J が行列 $\boldsymbol{R}$ の複雑な非線形関数である。
- 行列 $\boldsymbol{R}$ が回転行列であるという条件 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^\top = \boldsymbol{I}$ のもとで解を探索しなければならない。

そこで四元数表現によってこれを回避するとともに、くりこみ法によって系統的に計算する手順を構成する。

6 四元数表現による解法

単位ベクトル $\boldsymbol{l}$ の周りの角度 Ω の回転によって点 $\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha$ が点 $\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha$ に移るとき、次の関係が成り立つ (付録 B)。

$$q_0(\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha - \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha) + (\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha + \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha) \times \boldsymbol{q}_\mathbf{l} = \boldsymbol{0} \tag{12}$$

ただし q_0, $\boldsymbol{q}_\mathbf{l}$ を次のように定義する。

$$q_0 = \cos\frac{\Omega}{2}, \qquad \boldsymbol{q}_\mathbf{l} = \boldsymbol{l}\sin\frac{\Omega}{2} \tag{13}$$

定義より $q_0^2 + \|\boldsymbol{q}_\mathbf{l}\|^2 = 1$ であり、逆に $q_0^2 + \|\boldsymbol{q}_\mathbf{l}\|^2 = 1$ となる数 q_0 とベクトル $\boldsymbol{q}_\mathbf{l}$ が与えれば、式 (13) を満たす単位ベクトル $\boldsymbol{l}$ と回転角 Ω $(0 \le \Omega < \pi)$ が一意的に定まる。このように $\{q_0, \boldsymbol{q}_\mathbf{l}\}$ によって回転を指定することを回転の四元数表現と呼ぶ [6, 7]。

第 0 成分が q_0、第 $1 \sim 3$ 成分が $\boldsymbol{q}_\mathbf{l}$ となる 4 次元単位ベクトルを $\boldsymbol{q}$ と置き、四元数ベクトルと呼ぶ。そして次の 3×4 行列 $\boldsymbol{X}_\alpha$ を定義する。

$$\boldsymbol{X}_\alpha = \left(\boldsymbol{r}'_\alpha - \boldsymbol{r}_\alpha, (\boldsymbol{r}'_\alpha + \boldsymbol{r}_\alpha) \times \boldsymbol{I} \right) \tag{14}$$

右辺はベクトル $\boldsymbol{r}'_\alpha - \boldsymbol{r}_\alpha$ を第 0 列、行列 $(\boldsymbol{r}'_\alpha + \boldsymbol{r}_\alpha) \times \boldsymbol{I}$ を第 1, 2, 3 列とする行列を意味する。ただし、ベクトル $\boldsymbol{v}$ と行列 $\boldsymbol{A}$ の積 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{v}$ と行列 $\boldsymbol{A}$ の各列のベクトル積を列とする行列を表す。上式で $\boldsymbol{r}_\alpha, \boldsymbol{r}'_\alpha$ をそれぞれ $\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha$ で置き換えた行列を $\bar{\boldsymbol{X}}_\alpha$ と書くと、式 (12) は $\bar{\boldsymbol{X}}_\alpha \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ と書ける。これにラグランジュの未定乗数を導入して式 (9) を書き直すと次のようになる。

$$J = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{M}\boldsymbol{q}) \to \min \tag{15}$$

ただし $\boldsymbol{M}$ は次の 4×4 行列である。

$$\boldsymbol{M} = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{X}_\alpha^\top \boldsymbol{W}_\alpha \boldsymbol{X}_\alpha \tag{16}$$

重み行列 $\boldsymbol{W}_\alpha$ は次のように定義する 3×3 行列である。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_\alpha = \Big(& {q_0}^2 (V_0[\boldsymbol{r}_\alpha] + V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]) \\ & -2q_0 S[\boldsymbol{q_1} \times (V_0[\boldsymbol{r}_\alpha] - V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha])] \\ & + \boldsymbol{q_1} \times (V_0[\boldsymbol{r}_\alpha] + V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]) \times \boldsymbol{q_1} \Big)^{-1}\end{aligned} \tag{17}$$

ただし、行列 $\boldsymbol{A}$ に対して対称化作用素を $S[\boldsymbol{A}] = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top)/2$ と定義する。特に誤差の分布が一様・等方なら $V_0[\boldsymbol{r}_\alpha] = V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha] = \boldsymbol{I}$ であるから、最適化 (15) は最小二乗法 (1) となる。最適化 (15) は Zhang and Faugeras [20] や Weng et al. [19] が用いた四元数表現による最小二乗法の非一様・非等方誤差への拡張である。

7 くりこみ法

最適化 (15) を計算するくりこみ法の手順は次のようになる (付録 C; [9, 11, 12])。

1. データ $\{\boldsymbol{r}_\alpha\}$, $\{\boldsymbol{r}'_\alpha\}$ から式 (14) の行列 $\boldsymbol{X}_\alpha$, $\alpha = 1, ..., N$ を計算する。
2. $c = 0$, $\boldsymbol{W}_\alpha = \boldsymbol{I}$, $\alpha = 1, ..., N$ と置く。
3. 式 (16) の行列 $\boldsymbol{M}$ を計算する。
4. 次の 4×4 行列 $\boldsymbol{N}$ を計算する。

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} N & \boldsymbol{n}^\top \\ \boldsymbol{n} & \boldsymbol{N}' \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$N = \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{W}_\alpha; V_0[\boldsymbol{r}_\alpha] + V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]) \tag{19}$$

$$\boldsymbol{n} = -2 \sum_{\alpha=1}^{N} t_3[A[\boldsymbol{W}_\alpha (V_0[\boldsymbol{r}_\alpha] - V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha])]] \tag{20}$$

$$\boldsymbol{N}' = \sum_{\alpha=1}^{N} [\boldsymbol{W}_\alpha \times (V_0[\boldsymbol{r}_\alpha] + V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha])] \tag{21}$$

5. 次の行列の最小固有値 λ に対する単位固有ベクトル $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)^\top$ を計算する。

$$\hat{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} - c\boldsymbol{N} \tag{22}$$

6. $|\lambda| \approx 0$ であれば $\boldsymbol{q}$ を返して終了する。そうでなければ次のようの定数 c と重み行列 $\boldsymbol{W}_\alpha$ を更新してステップ 3 に戻る ($\boldsymbol{q_1} = (q_1, q_2, q_3)^\top$ と置く)。

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda}{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{N}\boldsymbol{q})} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_\alpha \leftarrow \Big(& {q_0}^2 (V_0[\boldsymbol{r}_\alpha] + V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]) \\ & -2q_0 S[\boldsymbol{q_1} \times (V_0[\boldsymbol{r}_\alpha] - V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha])] \\ & + \boldsymbol{q_1} \times (V_0[\boldsymbol{r}_\alpha] + V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]) \times \boldsymbol{q_1} \Big)^{-1}\end{aligned} \tag{24}$$

上の手順中で、行列 $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ に対してその内積を $(\mathbf{A}; \mathbf{B}) = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} B_{ij}$ と定義し、$[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}]$ をその (ij) 要素が $\sum_{k,l,m,n=1}^{3} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} A_{km} B_{lm}$ の行列と定義する。$A[\cdot]$ は反対称作用素であり、$A[\boldsymbol{A}] = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^\top)/2$ と定義する。また、反対称行列 $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ に対して $t_3[\boldsymbol{A}] = (A_{32}, A_{13}, A_{21})^\top$ と定義する。

8 ステレオ画像からの回転推定

図 1はステレオ実画像であり、図 2は同じ物体を回転台の上で回転させた画像である。図中に用いた特徴点にマークを示す。それぞれのステレオ画像から 3 次元復元を行なうとともに (付録 D)、復元した特徴点の 3 次元位置の共分散行列を計算する (付録 E)。回転後に物体についても同様にし、特徴点の重心が一致するように平行移動した後に回転を計算する。本論文に示した最適推定法および最小二乗法による回転軸と回転角を真の値[1]とともに表 1に示す。

これから最適推定が最小二乗法よりも精度が高いと思われるが、それを定量的に判定するには解の信頼性を評価しなければならない。これには次の 2 通りがある。

- 理論的な信頼性解析
- 計算機シミュレーションによる実験的評価

くりこみ法による方法は統計的に最適であるからクラメル・ラオの下界によって理論的に評価できるが、最小二乗法の解析は複雑になる。後者の方法としてよく知られたものが (パラメトリック) ブートストラップであり [2]、解法に無関係に適用できる。これは次のように行なう (付録 F)。まずデータ点 $\{\boldsymbol{r}_\alpha\}$, $\{\boldsymbol{r}'_\alpha\}$ を真の回転行列 $\bar{\boldsymbol{R}}$ に対して $\boldsymbol{r}'_\alpha = \bar{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{r}_\alpha$ が厳密に成立するように最適に補正する。次に、そのように補正した位置 $\{\tilde{\boldsymbol{r}}_\alpha\}$, $\{\tilde{\boldsymbol{r}}'_\alpha\}$ をステレオ画像上へ投影する。そして式 (10) で推定したノイズレベルをもつ乱数誤差を加え、計算した回転行列を $\hat{\boldsymbol{R}}^*$ とする。その相対回転 $\hat{\boldsymbol{R}}^* \bar{\boldsymbol{R}}^\top$ の回転軸を l_r^*、回転角を $\Delta\Omega^*$ とし、誤差ベクトル $\Delta\boldsymbol{\Omega}^* = \Delta\Omega^* l_r^*$ を 3 次元的にプロットする。これを乱数誤差を変えては何回も行なう。

図 3, 4はそれぞれ最適推定および最小二乗法に対して 100 点プロットした結果である。図中の楕円は式 (7) のクラメル・ラオの下界に真の回転行列 $\bar{\boldsymbol{R}}$ と補正値 $\{\tilde{\boldsymbol{r}}_\alpha\}$,

[1] 回転角は厳密であるが、カメラの光軸は回転軸と直交するように手で調節したため多少の誤差があると思われる。なお、上方を x 軸方向、左カメラの光軸を z 軸方向にとっている。

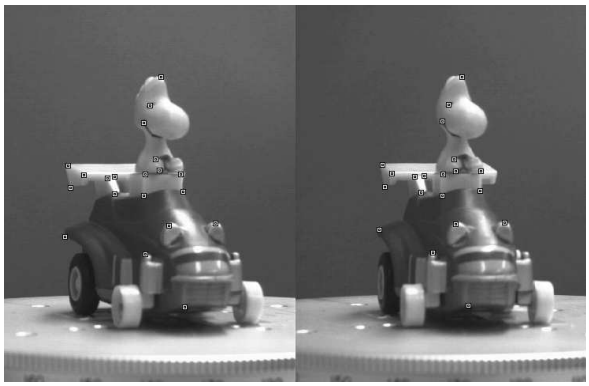

図 1: ステレオ画像 (回転前)。

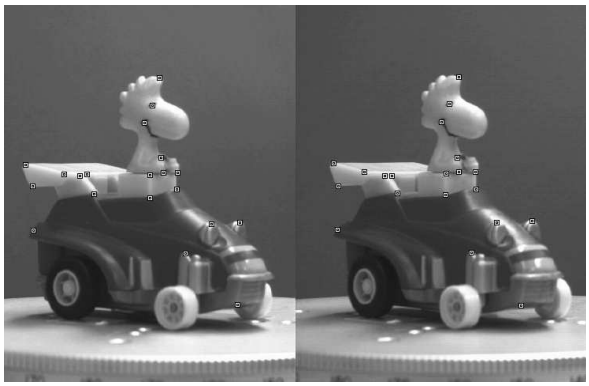

図 2: ステレオ画像 (回転後)。

$\{\tilde{\boldsymbol{r}}'_\alpha\}$、および式 (10) による推定値 $\hat{\epsilon}^2$ を代入して得られる共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{R}}]$ の表す楕円体

$$(\Delta\boldsymbol{\Omega}^*, V[\hat{\boldsymbol{R}}]^{-1}\Delta\boldsymbol{\Omega}^*) = 1 \tag{25}$$

であり、各方向の標準偏差を表している (見やすくするために立方体の枠で囲んでいる)。

誤差ベクトル $\Delta\boldsymbol{\Omega}^*$ のブートストラップ平均 $\boldsymbol{m}^*_\Omega$ およびブートストラップ共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{R}}^*]$ は次のように計算される。

$$\boldsymbol{m}^*_\Omega = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}\Delta\boldsymbol{\Omega}^*_b \tag{26}$$

$$V[\hat{\boldsymbol{R}}^*] = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}(\Delta\boldsymbol{\Omega}^*_b - \boldsymbol{m}^*_\Omega)(\Delta\boldsymbol{\Omega}^*_b - \boldsymbol{m}^*_\Omega)^\top \tag{27}$$

ただし B はブートストラップの回数であり、$\Delta\boldsymbol{\Omega}^*_b$ は b 回目のブートストラップの回転誤差ベクトルである。これらより、回転角誤差 $\Delta\Omega^*$ のブートストラップ偏差 E^*_Ω およびブートストラップ標準偏差 S^*_Ω が次式で計算される。

$$E^*_\Omega = \|\boldsymbol{m}^*_\Omega\|, \quad S^*_\Omega = \sqrt{\mathrm{tr}V[\hat{\boldsymbol{R}}^*]} \tag{28}$$

ただし tr は行列のトレースを表す。標準偏差 S^*_Ω に対応するクラメル・ラオの下界は次のようになる。

$$S_\Omega = \sqrt{\mathrm{tr}V[\hat{\boldsymbol{R}}]} \tag{29}$$

表 1: 回転軸と回転角。

	回転軸	回転角
最適推定	$(0.9999, 0.0003, 0.0123)$	29.769°
最小二乗法	$(0.9985, -0.0545, 0.0040)$	26.790°
真の値	$(1.0000, 0.0000, 0.0000)$	30.000°

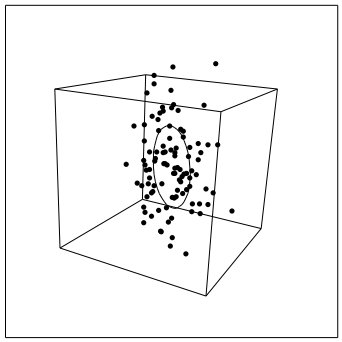

図 3: 最適推定の誤差分布。

$B = 2000$ に対する最小二乗解と最適推定解のブートストラップ偏差と標準偏差、およびクラメル・ラオの下界を表 2に示す。

表 1, 表 2は回転角に関する情報のみを取り出したものであるが、図 3, 図 4に示したように、回転角と回転軸方向を合わせた誤差の挙動は式 (27) に示したブートストラップ共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{R}}^*]$ によって記述される。ここでは一例のみ示したが、多くのシミュレーション実験によっても、最適推定のブートストラップ共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{R}}^*]$ はクラメル・ラオの下界 $V[\hat{\boldsymbol{R}}]$ に非常に近い値をとり、最小二乗法に比べて極めて高い精度があることが確かめられる。したがって最適推定解の精度はクラメル・ラオの下界によって十分に評価できる。

9 まとめ

本論文では 2 組の 3 次元データ点集合の間の回転を最適に推定する計算法を述べるとともに、計算した解の信頼性を定量的に評価する手法を示した。空間データは画像データに比べて測定装置の特性による誤差分布の異方性が著しいので、等方誤差分布を前提とする最小二乗法は大きな誤差が生じる。従来この事実は最小二乗法の計算の簡便さに目を奪われて見落されていた。

本論文では誤差分布の異方性を考慮した最適推定の方式を示すとともに、解を系統的に計算するくりこみ法を回転の四元数表現によって構成した。そして、ステレオ視による 3 次元復元の場合の例を示し、本論文の方法が最小二乗法に比べて著しく精度を向上させることをブートストラップによって検証した。同時にその精度はクラメル・ラオの下界をほぼ達成し、したがってクラメル・ラオの下界によって解析的に評価できることを示した。

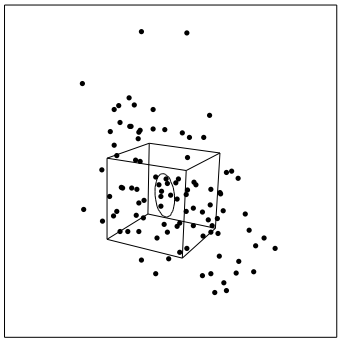

図 4: 最小二乗法の誤差分布。

表 2: ブートストラップ誤差とクラメル・ラオの下界。

	E^*_Ω	S^*_Ω
最適推定	0.0277°	1.1445°
最小二乗法	0.0468°	3.0868°
クラメル・ラオの下界	—	1.1041°

参考文献

[1] K. S. Arun, T. S. Huang and S. D. Blostein, Least-squares fitting of two 3-D point sets, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **9**-5 (1987), 698–700.

[2] B. Efron and R. J. Tibshirani, *An Introduction to Bootstrap*, Chapman-Hall, New York, 1993.

[3] B. K. P. Horn, Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions, *J. Opt. Soc. Am.*, A**4** (1987), 629–642.

[4] B. K. P. Horn, H. M. Hilden and S. Negahdaripour, Closed-form solution of absolute orientation using orthonormal matrices, *J. Opt. Soc. Am.*, A**5** (1988), 1127–1135.

[5] D. Goryn and S. Hein, On the estimation of rigid body rotation from noisy data, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **17**-12 (1995), 1219–1220.

[6] K. Kanatani, *Group-Theoretical Methods in Image Understanding*, Springer, Berlin, 1990,

[7] 金谷健一, 「画像理解 — 3 次元認識の数理 —」, 森北出版, 1990.

[8] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[9] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, **35**-2 (1994), 201–209.

[10] K. Kanatani, Analysis of 3-D rotation fitting, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **16**-5 (1994), 543–5490.

[11] 金谷健一, 「空間データの数理 — 3 次元コンピューティングに向けて —」, 朝倉書店, 1995.

[12] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier, Amsterdam, 1996.

[13] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Reliability of 3-D reconstruction by stereo vision, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **E78-D**-10 (1995), 1301–1306.

[14] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Reliability of fitting a plane to range data, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **E78-D**-12 (1995), 1630–1635.

[15] 森本正志, 末永康仁, 下原勝憲, 座標変換パラメータの並列推定に基づく複数距離情報の統合, 電子情報通信学会論文誌, **J80-D-II**- 2 (1997), 548–557.

[16] J. Oliensis, Rigorous bounds for two-frame structure from motion, *Proc. 4th European Conf. Computer Vision*, April 1996, Cambridge, Vol. 2, pp. 184–195.

[17] 清水郁子, 出口光一郎, 位置関係が未知の複数視点からの距離画像の統合, 画像の認識・理解シンポジウム, 1996 年 7 月, 奈良, pp. 199–204.

[18] S. Umeyama, Least-squares estimation of transformation parameters between two point sets, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **13**-4 (1991), 379–380.

[19] J. Weng, T. S. Huang and N. Ahuja, *Motion and Structure from Image Sequences*, Springer, Berlin, 1993.

[20] Z. Zhang and O. Faugeras, *3D Dynamic Scene Analysis*, Springer, Berlin, 1992.

付録

A 最小二乗法の解析解

最小二乗法 (1) の解析的な解法として次の方法がよく知られている。まず次の相関行列を定義する。

$$\boldsymbol{N} = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{r}'_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha^\top \tag{30}$$

四元数による方法 [3]: 次の 4×4 行列を計算する。

$$\tilde{\boldsymbol{N}} = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}\boldsymbol{N} & 2t_3[A[\boldsymbol{N}]]^\top \\ 2t_3[A[\boldsymbol{N}]] & 2S[\boldsymbol{N}] - (\mathrm{tr}\boldsymbol{N})\boldsymbol{I} \end{pmatrix} \tag{31}$$

この行列の最大固有値に対する単位固有ベクトル $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)^\top$ が解の四元数ベクトルとなる。$\boldsymbol{q_1} = (q_1, q_2, q_3)^\top$ と置くと、回転行列は次のようになる。

$$\boldsymbol{R} = (q_0^2 - \|\boldsymbol{q_1}\|^2)\boldsymbol{I} + 2(\boldsymbol{q_1}\boldsymbol{q_1}^\top + q_0\boldsymbol{q_1} \times \boldsymbol{I}) \tag{32}$$

特異値分解による方法 [1, 5, 10, 18]: 相関行列 $\boldsymbol{N}$ を次のように特異値分解する。

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^\top \tag{33}$$

ここに $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{U}$ は直交行列であり、$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$ である[2](記号 $\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ は σ_1, σ_2, σ_3 をこの順に対角要素とする対角行列を表す)。最小二乗解は次のように与えられる。

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V}\mathrm{diag}(1, 1, \det(\boldsymbol{V}\boldsymbol{U}^\top))\boldsymbol{U}^\top \tag{34}$$

極分解による方法 [4]: 相関行列 $\boldsymbol{N}$ を次のように極分解する。

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{V}'\boldsymbol{S} \tag{35}$$

[2] σ_1, σ_2, σ_3 は行列 N の特異値と呼ばれる。

ただし $\boldsymbol{V}'$ は直交行列であり、$\boldsymbol{S}$ は半正値対称行列である。行列 $\boldsymbol{S}$ の最小固有値に対する単位固有ベクトルを $\boldsymbol{v}'$ とすると、最小二乗解は次のように与えられる。

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V}'(\boldsymbol{I} + (\det \boldsymbol{V}' - 1)\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}'^{\top}) \tag{36}$$

B　回転の四元数表現

単位ベクトル $\boldsymbol{l}$ の周りの角度 Ω の回転によって点 $\bar{\boldsymbol{r}}$ が点 $\bar{\boldsymbol{r}}'$ に移るとする。2 点 $\bar{\boldsymbol{r}}$, $\bar{\boldsymbol{r}}'$ の変位 $\bar{\boldsymbol{r}}' - \bar{\boldsymbol{r}}$ と中点 $(\bar{\boldsymbol{r}} + \bar{\boldsymbol{r}}')/2$ の幾何学的関係より次の式が得られる。

$$\bar{\boldsymbol{r}}' - \bar{\boldsymbol{r}} = 2\tan\frac{\Omega}{2}\boldsymbol{l} \times \frac{\bar{\boldsymbol{r}} + \bar{\boldsymbol{r}}'}{2} \tag{37}$$

両辺に $\cos(\Omega/2)$ を掛けて変形し、q_0, $\boldsymbol{q}_{\mathrm{l}}$ を式 (13) のように定義すると式 (12) が得られる。

C　くりこみ法の導出

式 (14) の行列 $\boldsymbol{X}_\alpha$ 中のデータ $\boldsymbol{r}_\alpha$, $\boldsymbol{r}'_\alpha$ をそれぞれ $\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha$ に置き換えたものを $\bar{\boldsymbol{X}}_\alpha$ とし、$\boldsymbol{X}_\alpha = \bar{\boldsymbol{X}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{X}_\alpha$ と書くと、誤差項 $\Delta\boldsymbol{X}_\alpha$ は次のようになる。

$$\Delta\boldsymbol{X}_\alpha = \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{r}'_\alpha - \Delta\boldsymbol{r}_\alpha, (\Delta\boldsymbol{r}'_\alpha + \Delta\boldsymbol{r}_\alpha) \times \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \tag{38}$$

これを用いて式 (16) の行列 $\boldsymbol{M}$ を $\boldsymbol{M} = \bar{\boldsymbol{M}} + \Delta\boldsymbol{M}$ と書くと、誤差項は次のようになる ($\bar{\boldsymbol{M}}$ は $\boldsymbol{M}$ 中のデータを真の値に置き換えた行列)。

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{M} = \sum_{\alpha=1}^{N} \Big(&\Delta\boldsymbol{X}_\alpha^{\top}\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{X}_\alpha + \boldsymbol{X}_\alpha^{\top}\boldsymbol{W}_\alpha\Delta\boldsymbol{X}_\alpha \\ &+ \Delta\boldsymbol{X}_\alpha^{\top}\boldsymbol{W}_\alpha\Delta\boldsymbol{X}_\alpha \Big)\end{aligned} \tag{39}$$

この期待値が $\boldsymbol{M}$ の偏差であり、式 (21) の行列 $\boldsymbol{N}$ を用いて次のように書ける。

$$\begin{aligned} E[\Delta\boldsymbol{M}] &= \sum_{\alpha=1}^{N} E[\Delta\boldsymbol{X}_\alpha^{\top}\boldsymbol{W}_\alpha\Delta\boldsymbol{X}_\alpha] = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N} E[\begin{pmatrix} (\Delta\boldsymbol{r}'_\alpha - \Delta\boldsymbol{r}_\alpha, \boldsymbol{W}_\alpha(\Delta\boldsymbol{r}'_\alpha - \Delta\boldsymbol{r}_\alpha)) \\ -(\Delta\boldsymbol{r}'_\alpha + \Delta\boldsymbol{r}_\alpha) \times \boldsymbol{W}_\alpha(\Delta\boldsymbol{r}'_\alpha - \Delta\boldsymbol{r}_\alpha) \\ -((\Delta\boldsymbol{r}'_\alpha + \Delta\boldsymbol{r}_\alpha) \times \boldsymbol{W}_\alpha(\Delta\boldsymbol{r}'_\alpha - \Delta\boldsymbol{r}_\alpha))^{\top} \\ (\Delta\boldsymbol{r}'_\alpha + \Delta\boldsymbol{r}_\alpha) \times \boldsymbol{W}_\alpha \times (\Delta\boldsymbol{r}'_\alpha + \Delta\boldsymbol{r}_\alpha) \end{pmatrix}] \\ &= \epsilon^2\boldsymbol{N} \end{aligned} \tag{40}$$

これからくりこみ法の処方 [9, 11, 12] に従って本文中に示した手順が得られる。

D　ステレオ画像からの 3 次元復元

各特徴点の画像座標を (x_α, y_α), (x'_α, y'_α), $\alpha = 1, ..., N$ (単位は画素) とするとき (プライムのない方が左画像、あるのが右画像と約束する)、これらを次の 3 次元ベクトルで表す。

$$\boldsymbol{x}_\alpha = \begin{pmatrix} x_\alpha/f \\ y_\alpha/f \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}'_\alpha = \begin{pmatrix} x'_\alpha/f' \\ y'_\alpha/f' \\ 1 \end{pmatrix} \tag{41}$$

ただし f, f' はそれぞれのカメラの焦点距離である (単位は画素)。

左カメラ座標系を基準にとり、右カメラ座標系が左カメラ座標系に並進 $\boldsymbol{h}_s$、回転 $\boldsymbol{R}_s$ を加えたものであるとし、$\{\boldsymbol{h}_s, \boldsymbol{R}_s\}$ を運動パラメータと呼ぶ。そして基本行列を

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{h}_s \times \boldsymbol{R}_s \tag{42}$$

と定義する。また射影行列 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}$ を次のよう定義する。

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}} = \mathrm{diag}(1, 1, 0) \tag{43}$$

次のようにして各特徴点の 3 次元位置が最適に計算法できる [13]。まず各 $\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$ を次のように補正する。

$$\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha - \frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}'_\alpha)\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}'_\alpha}{\|\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{G}^{\top}\boldsymbol{x}_\alpha\|^2 + \|\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}'_\alpha\|^2} \tag{44}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha = \boldsymbol{x}'_\alpha - \frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}'_\alpha)\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{G}^{\top}\boldsymbol{x}_\alpha}{\|\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{G}^{\top}\boldsymbol{x}_\alpha\|^2 + \|\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}'_\alpha\|^2} \tag{45}$$

補正した $\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ を改めて $\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$ としてエピ極線方程式 $(\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha) = 0$ が十分な精度で成立するまでこれを反復する。その結果を用いて、各点まで左右のカメラ座標系におけるの奥行き距離が次のように与えられる。

$$\begin{aligned} Z_\alpha &= \frac{(\boldsymbol{h}_s \times \boldsymbol{R}_s\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha, \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha \times \boldsymbol{R}_s\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha)}{\|\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha \times \boldsymbol{R}_s\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha\|^2} \\ Z'_\alpha &= \frac{(\boldsymbol{h}_s \times \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha \times \boldsymbol{R}_s\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha)}{\|\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha \times \boldsymbol{R}_s\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha\|^2} \end{aligned} \tag{46}$$

左カメラ座標系を基準にとると、復元した特徴点の位置は $\boldsymbol{r}_\alpha = Z_\alpha\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha$ となる。

E　共分散行列の計算

ステレオ画像から復元した点 $\boldsymbol{r}_\alpha$ の正規化共分散行列 $V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]$ は次のように計算できる [13]。まず補正した $\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ の正規化共分散行列を次のように計算する。

$$\begin{aligned} V_0[\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha] &= \boldsymbol{P}_{\mathrm{k}} - \frac{(\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha)(\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha)^{\top}}{\|\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{G}^{\top}\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha\|^2 + \|\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha\|^2} \\ V_0[\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha] &= \boldsymbol{P}_{\mathrm{k}} - \frac{(\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{G}^{\top}\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha)(\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{G}^{\top}\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha)^{\top}}{\|\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{G}^{\top}\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha\|^2 + \|\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha\|^2} \\ V_0[\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha] &= -\frac{(\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha)(\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{G}^{\top}\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha)^{\top}}{\|\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{G}^{\top}\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha\|^2 + \|\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha\|^2} \end{aligned} \tag{47}$$

距離 Z_α の正規化分散 $V_0[Z_\alpha]$ と $\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha$, Z_α の正規化相関ベクトル $V_0[\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, Z_\alpha]$ を次のように計算する ($N[\,\cdot\,]$ は単位ベクトルへの正規化を意味する)。

$$\boldsymbol{n}_\alpha = N[\boldsymbol{h}_s \times \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha], \quad \hat{\boldsymbol{m}}_\alpha = \boldsymbol{n}_\alpha \times \boldsymbol{R}_s\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha \tag{48}$$

$$V_0[Z_\alpha] = \frac{1}{\|\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha \times \boldsymbol{R}_s \hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha\|^2} \Big(Z_\alpha^2 (\hat{\boldsymbol{m}}_\alpha, V_0[\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha]\hat{\boldsymbol{m}}_\alpha) - 2Z_\alpha Z'_\alpha (\hat{\boldsymbol{m}}_\alpha, V_0[\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha]\boldsymbol{R}_s^\top \hat{\boldsymbol{m}}_\alpha) + Z_\alpha'^2 (\hat{\boldsymbol{m}}_\alpha, \boldsymbol{R}_s V_0[\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha]\boldsymbol{R}_s^\top \hat{\boldsymbol{m}}_\alpha) \Big) \tag{49}$$

$$V_0[\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, Z_\alpha] = -\frac{(Z_\alpha V_0[\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha] - Z'_\alpha[\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha]\boldsymbol{R}_s^\top)\hat{\boldsymbol{m}}_\alpha}{(\hat{\boldsymbol{m}}_\alpha, \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha)} \tag{50}$$

点 $\boldsymbol{r}_\alpha$ の正規化共分散行列 $V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]$ は次のようになる。

$$V_0[\boldsymbol{r}_\alpha] = Z_\alpha^2 V_0[\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha] + 2Z_\alpha S[V_0[\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, Z_\alpha]\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha^\top] + V_0[Z_\alpha]\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha^\top \tag{51}$$

F　画像上のブートストラップ

真の回転行列 $\bar{\boldsymbol{R}}$ を用いてデータ $\{\boldsymbol{r}_\alpha\},\ \{\boldsymbol{r}'_\alpha\}$ を次のように最適に補正する [12]。

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_\alpha = \boldsymbol{r}_\alpha + V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\bar{\boldsymbol{R}}^\top \bar{\boldsymbol{W}}_\alpha (\boldsymbol{r}'_\alpha - \bar{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{r}_\alpha)$$
$$\tilde{\boldsymbol{r}}'_\alpha = \boldsymbol{r}'_\alpha - V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]\bar{\boldsymbol{W}}_\alpha (\boldsymbol{r}'_\alpha - \bar{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{r}_\alpha) \tag{52}$$

$$\bar{\boldsymbol{W}}_\alpha = \Big(\bar{\boldsymbol{R}} V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\bar{\boldsymbol{R}}^\top + V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]\Big)^{-1} \tag{53}$$

これから回転前の特徴点の位置を次のように推定する。

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_\alpha = Z[\tilde{\boldsymbol{r}}_\alpha], \quad \tilde{\boldsymbol{x}}'_\alpha = Z[\boldsymbol{R}_s^\top (\tilde{\boldsymbol{r}}_\alpha - \boldsymbol{h}_s)] \tag{54}$$

ただし $Z[\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{a}/(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{a})$ $(\boldsymbol{k} = (0,0,1)^\top)$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の第 3 成分を 1 とする正規化を表す。回転後の特徴点の位置も次のように推定する。

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_\alpha = Z[\tilde{\boldsymbol{r}}'_\alpha], \quad \tilde{\boldsymbol{x}}'_\alpha = Z[\boldsymbol{R}_s^\top (\tilde{\boldsymbol{r}}'_\alpha - \boldsymbol{h}_s)] \tag{55}$$

次にノイズレベル ϵ の推定値 $\hat{\epsilon}$ を式 (10) から計算する。そして期待値 0、標準偏差 $f\hat{\epsilon}$ の正規乱数 $\delta x_\alpha,\ \delta y_\alpha,\ \delta x'_\alpha,\ \delta y'_\alpha$ を独立に発生させ、ブートストラップ対応点 ${\boldsymbol{x}_\alpha}^*, {\boldsymbol{x}'_\alpha}^*$ を次のように生成する (回転前と回転後の画像について独立に行なう)。

$${\boldsymbol{x}_\alpha}^* = \tilde{\boldsymbol{x}}_\alpha + \begin{pmatrix} \delta x_\alpha/f \\ \delta y_\alpha/f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {\boldsymbol{x}'_\alpha}^* = \tilde{\boldsymbol{x}}'_\alpha + \begin{pmatrix} \delta x'_\alpha/f' \\ \delta y'_\alpha/f' \\ 0 \end{pmatrix} \tag{56}$$